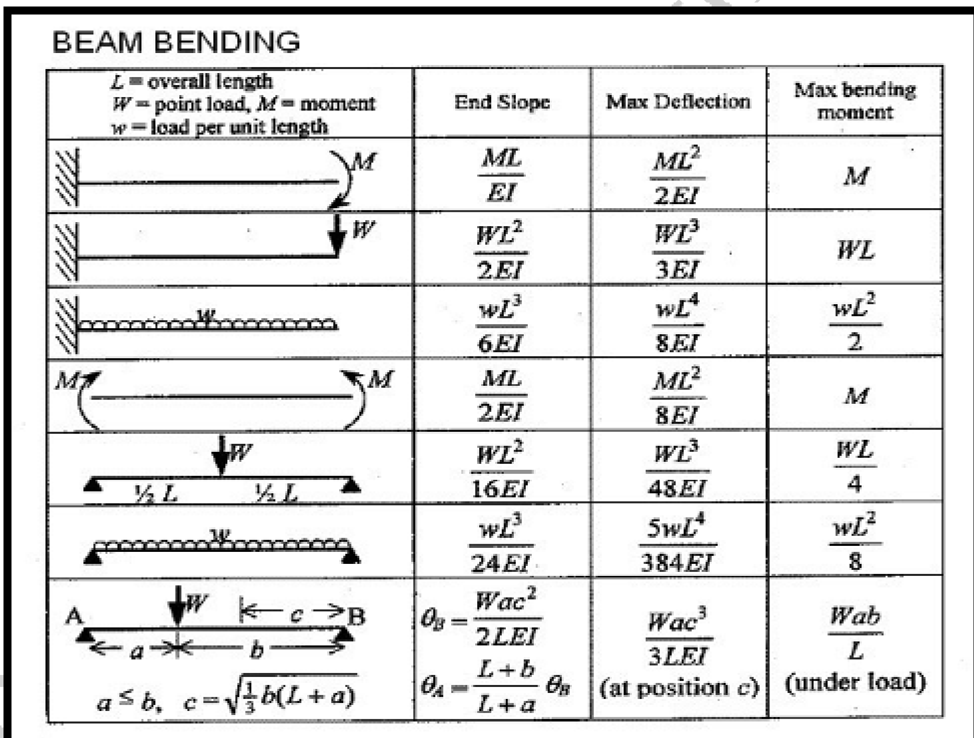
به نام خدا

درسنامه آزمون کارشناسی رسمی

عمران و معماری (استاتیک، تحلیل سازه و مقاومت مصالح)



BEAM BENDING

L = overall length W = point load, M = moment w = load per unit length	End Slope	Max Deflection	Max bending moment
M	$\frac{ML}{EI}$	$\frac{ML^2}{2EI}$	M
W	$\frac{WL^2}{2EI}$	$\frac{WL^3}{3EI}$	WL
w	$\frac{wL^3}{6EI}$	$\frac{wL^4}{8EI}$	$\frac{wL^2}{2}$
M M	$\frac{ML}{2EI}$	$\frac{ML^2}{8EI}$	M
W ½ L ½ L	$\frac{WL^2}{16EI}$	$\frac{WL^3}{48EI}$	$\frac{WL}{4}$
w	$\frac{wL^3}{24EI}$	$\frac{5wL^4}{384EI}$	$\frac{wL^2}{8}$
A W c B a b $a \leq b,\ c = \sqrt{\frac{1}{3}b(L+a)}$	$\theta_B = \frac{Wac^2}{2LEI}$ $\theta_A = \frac{L+b}{L+a}\theta_B$	$\frac{Wac^3}{3LEI}$ (at position c)	$\frac{Wab}{L}$ (under load)

علی گوهررخی

Gmail: goharrokhi.ali@gmail.com

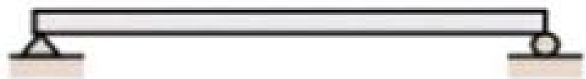
Telegram: @ali_goharr

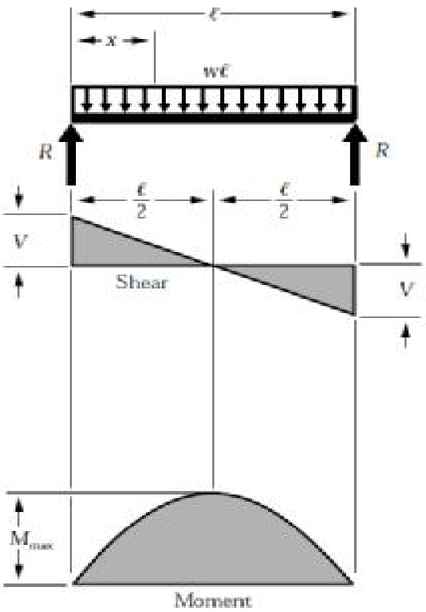
بخش اول:

استاتیک و تحلیل سازه

دیاگرام‌های برش و خمش

- **تیر دو سر ساده:**





$R = V \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{w\ell}{2}$

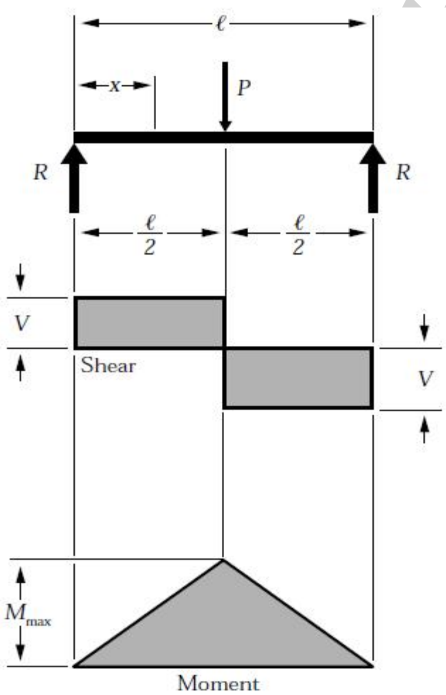
$V_x \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots = w\left(\frac{\ell}{2} - x\right)$

M_{max} (at center) $\dots\dots\dots = \frac{w\ell^2}{8}$

$M_x \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{wx}{2}(\ell - x)$

Δ_{max} (at center) $\dots\dots\dots = \frac{5w\ell^4}{384\,EI}$

$\Delta_x \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{wx}{24\,EI}(\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3)$



$R = V \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{P}{2}$

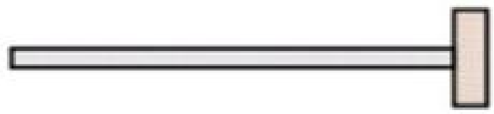
M_{max} (at point of load) $\dots\dots = \frac{P\ell}{4}$

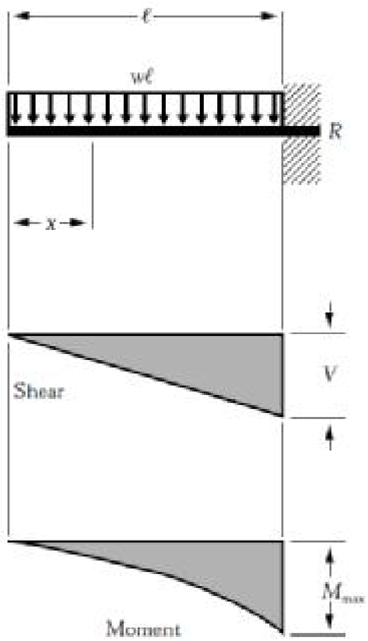
$M_x \left(\text{when } x < \frac{\ell}{2}\right) \dots\dots\dots = \frac{Px}{2}$

Δ_{max} (at point of load) $\dots\dots = \frac{P\ell^3}{48EI}$

$\Delta_x \left(\text{when } x < \frac{\ell}{2}\right) \dots\dots\dots = \frac{Px}{48EI}(3\ell^2 - 4x^2)$

- **تیر یک سر گیردار (طره ای):**





$R = V$ . . . . $= w\ell$

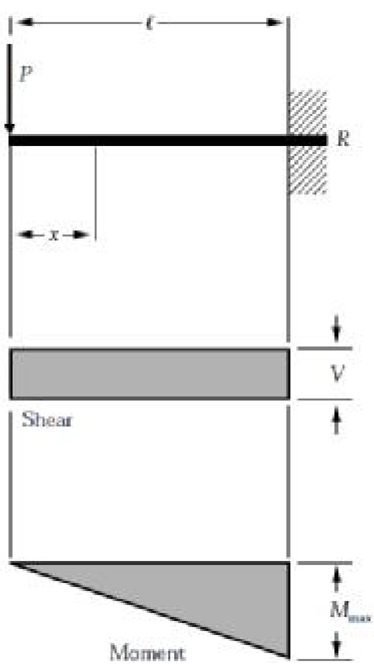
V_x . . . . $= wx$

M_{max} (at fixed end) . . . . $= \dfrac{w\ell^2}{2}$

M_x . . . . $= \dfrac{wx^2}{2}$

Δ_{max} (at free end) . . . . $= \dfrac{w\ell^4}{8EI}$

Δ_x . . . . $= \dfrac{w}{24EI}(x^4 - 4\ell^3x + 3\ell^4)$



$R = V$ . . . . $= P$

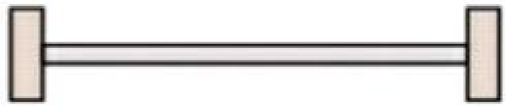
M_{max} (at fixed end) . . . . $= P\ell$

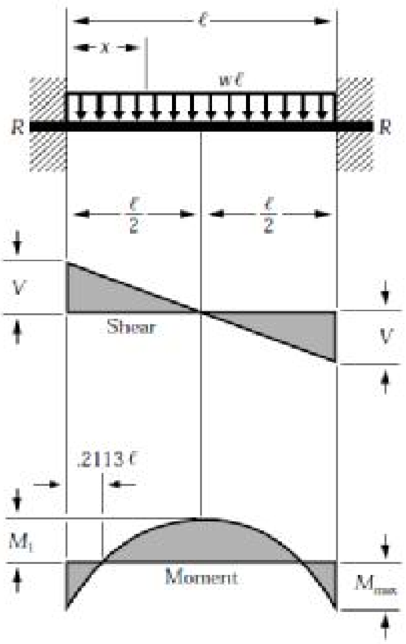
M_x . . . . $= Px$

Δ_{max} (at free end) . . . . $= \dfrac{P\ell^3}{3EI}$

Δ_x . . . . $= \dfrac{P}{6EI}(2\ell^3 - 3\ell^2x + x^3)$

- **تیر ساده دو سر گیردار:**





$$R = V \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{w\ell}{2}$$

$$V_x \quad \dots\dots\dots \quad = w\left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

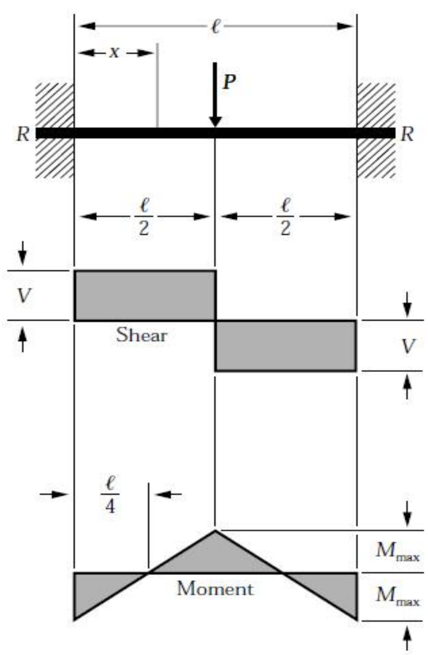
$$M_{max} \text{ (at ends)} \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{w\ell^2}{12}$$

$$M_1 \text{ (at center)} \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{w\ell^2}{24}$$

$$M_x \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{w}{12}(6\ell x - \ell^2 - 6x^2)$$

$$\Delta_{max} \text{ (at center)} \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{w\ell^4}{384EI}$$

$$\Delta_x \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{wx^2}{24EI}(\ell - x)^2$$



$$R = V \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{P}{2}$$

$$M_{max} \text{ (at center and ends)} \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{P\ell}{8}$$

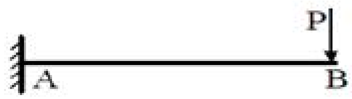
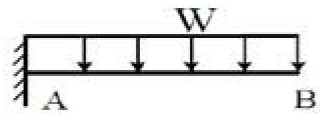
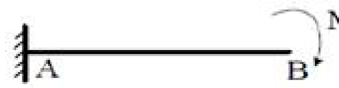
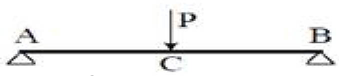
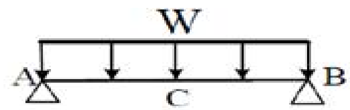
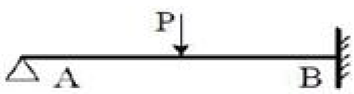
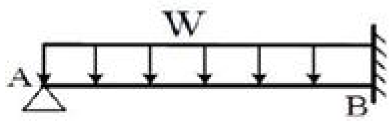
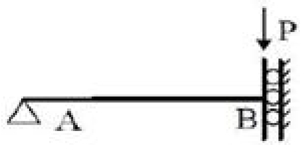
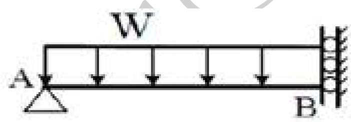
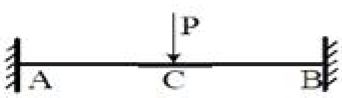
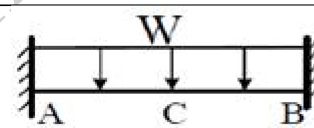
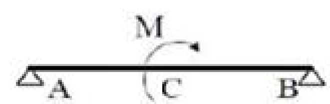
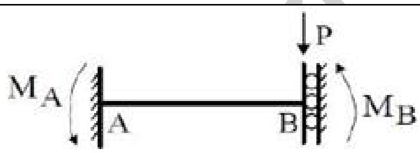
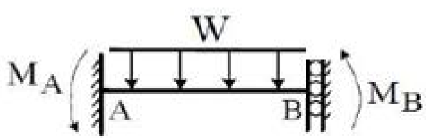
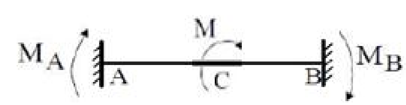
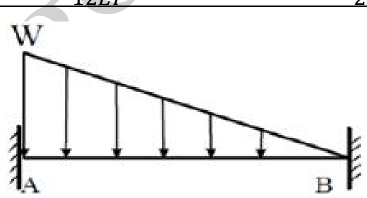
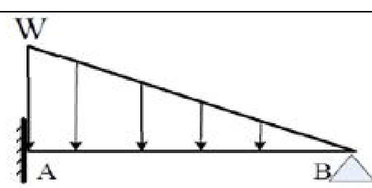
$$M_x \left(\text{when } x < \frac{\ell}{2}\right) \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{P}{8}(4x - \ell)$$

$$\Delta_{max} \text{ (at center)} \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{P\ell^3}{192EI}$$

$$\Delta_x \left(\text{when } x < \frac{\ell}{2}\right) \quad \dots\dots\dots \quad = \frac{Px^2}{48EI}(3\ell - 4x)$$

تحلیل سازه ها با استفاده از روش سازگاری

این روش یکی از بهترین روشها برای تحلیل یک سازه نامعین می‌باشد. در روابط زیر طول L و صلبیت خمشی EI است.

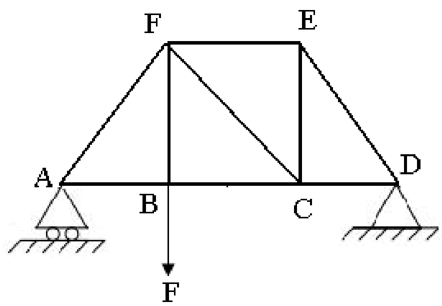
 $\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$ $\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$	 $\Delta_B = \frac{WL^4}{8EI}$ $\theta_B = \frac{WL^3}{6EI}$	 $\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$ $\theta_B = \frac{ML}{EI}$
 $\Delta_C = \frac{PL^3}{48EI}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$	 $\Delta_C = \frac{5WL^4}{384EI}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{WL^3}{24EI}$	 $\Delta_C = \frac{ML^2}{16EI}$ $\theta_A = 2\theta_B = \frac{ML}{3EI}$
 $\theta_A = \frac{PL^2}{32EI}$ $M_B = \frac{3PL}{16}$	 $\theta_A = \frac{WL^3}{48EI}$ $M_B = \frac{WL^2}{8}$	 $\theta_A = \frac{ML}{4EI}$ $M_B = \frac{M}{2}$ (در جهت M)
 $\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$ $\theta_A = \frac{PL^2}{2EI}$	 $\Delta_B = \frac{5WL^4}{24EI}$ $\theta_A = \frac{WL^3}{3EI}$	 $\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$ $\theta_A = \frac{ML}{EI}$
 $\Delta_C = \frac{PL^3}{192EI}$ $M_C = M_A = M_B = \frac{PL}{8}$	 $\Delta_C = \frac{WL^4}{384EI}$ $M_A = M_B = 2M_C = \frac{WL^2}{12}$	 $\Delta_C = 0$ $\theta_A = \theta_B = \frac{\theta_C}{2} = \frac{ML}{24EI}$
 $\Delta_B = \frac{PL^3}{12EI}$ $M_A = M_B = \frac{PL}{2}$	 $\Delta_B = \frac{WL^4}{24EI}$ $M_A = \frac{WL^2}{3}$ $M_B = \frac{WL^2}{6}$	 $\Delta_C = 0$ $\theta_C = \frac{ML}{16EI}$ $M_A = M_B = \frac{ML}{4}$
 $M_A = \frac{WL^2}{20}$ $M_B = \frac{WL^2}{30}$	 $M_A = \frac{WL^2}{15}$	

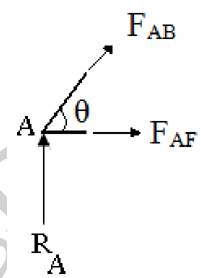
خرپا

بطورکلی در تحلیل خرپا دو روش وجود دارد: 1- روش مفصل، 2- روش مقطع.

- **روش مفصل**

در این روش یک مفصل را جدا کرده و برای آن دو معادله تعادل $\Sigma F_x=0$ و $\Sigma F_y=0$ را برای نیروهای وارده به گره و اعضای متصل شده به آن بررسی می‌شود.

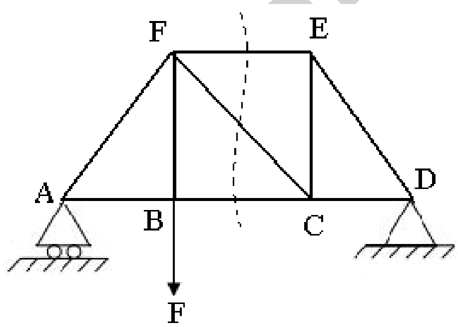


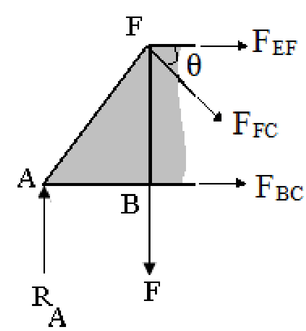


$$\begin{cases} \sum F_x = F_{AF} + F_{AB}\cos\theta = 0 \\ \sum F_y = R_A + F_{AB}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

- **روش مقطع**

در این روش توسط مقطعی خرپا را به دو بخش تقسیم کرده و برای هرکدام از بخش‌های جدا شده سه معادله تعادل $\Sigma F_x=0$ ، $\Sigma F_y=0$ و $\Sigma M=0$ را برای نیروهای وارده به آن بخش و اعضای قطع شده توسط مقطع بررسی می‌شود.

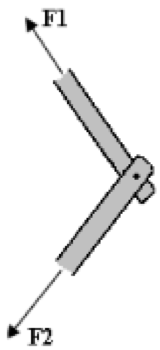


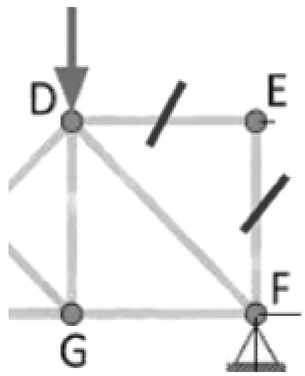


$$\begin{cases} \sum F_x = F_{BC} + F_{FC}\cos\theta + F_{EF} = 0 \\ \sum F_y = R_A - F - F_{FC}\sin\theta = 0 \\ \sum M_F = R_A \times a - F_{BC} \times b = 0 \end{cases}$$

- **نکات مهم**

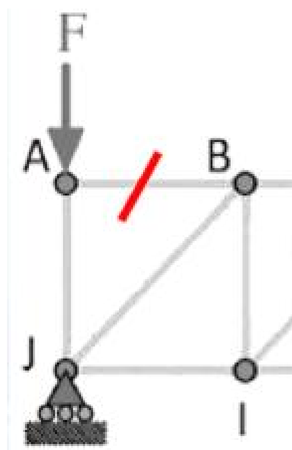
1) اگر به گره‌ای دو عضو غیر همراستا متصل شده باشد و نیرویی در آن گره نباشد، آن دو عضو صفر نیرویی هستند.





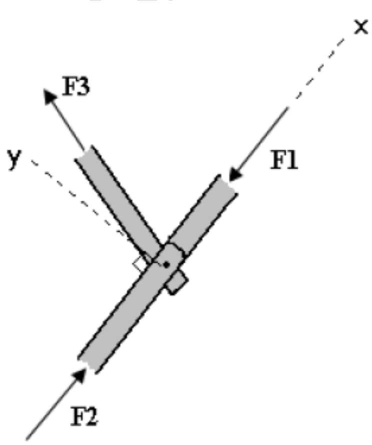
$F1=F2=0$
$F_{ED}=F_{EF}=0$

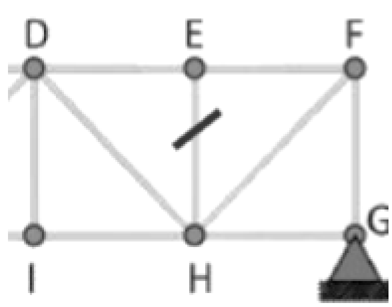
2) عضوی که بر روی یک گره در یک راستا باشد تک باشد، آن عضو صفر نیرویی است.



$F_{AB}=0$

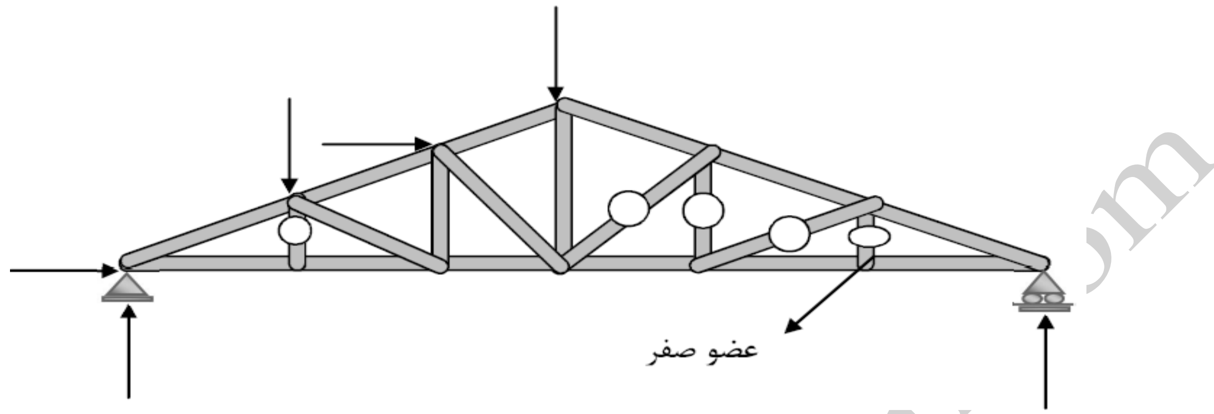
3) اگر به گره‌ای سه عضو متصل شده باشد که دو عضو آن در یک راستا باشند، در اینصورت عضو سوم صفر نیرویی است.



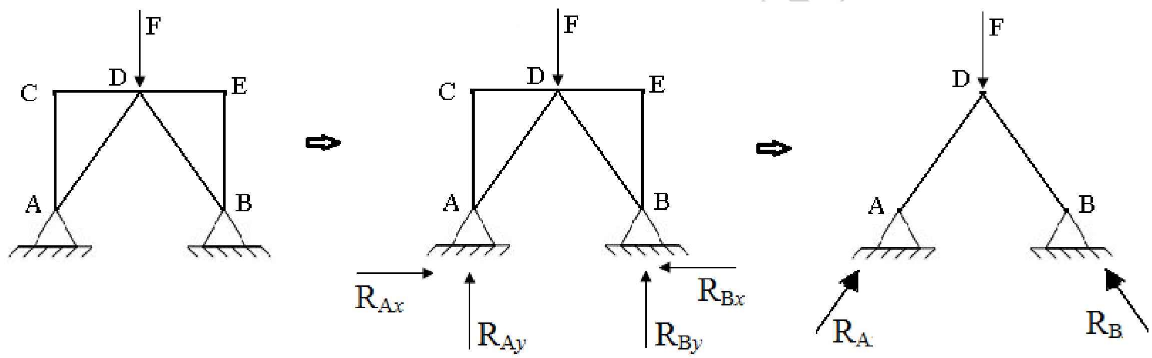


$F3=F_{EH}=0$

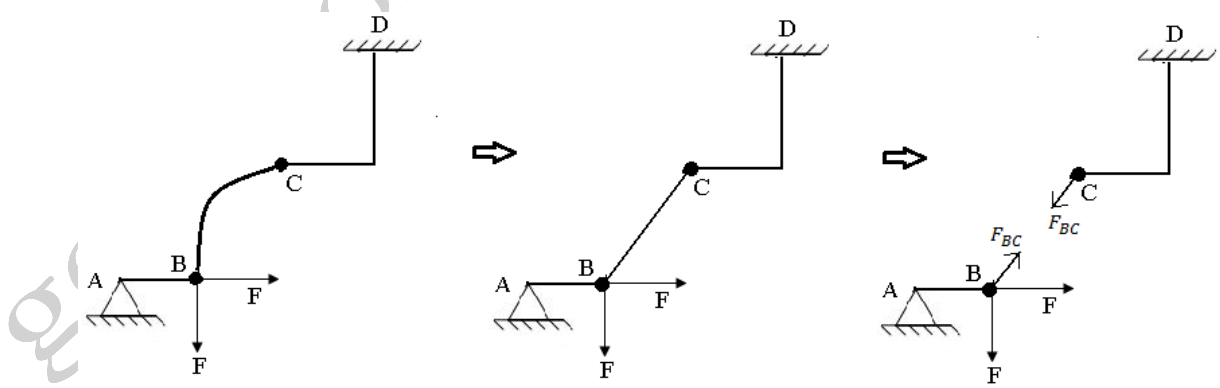
مثال:



4) اگر به تکیه‌گاه مفصلی فقط یک عضو متصل باشد، می‌توان برای آن تکیه‌گاه فقط یک واکنش در نظر گرفت که در راستای عضو می‌باشد.



5) اگر دو مفصل در یک راستا باشند و نیرویی روی عضو بین آنها نباشد، می‌توان بین آن دو مفصل یک میله، که فقط نیروی محوری دارد، قرار داد.



بخش دوم:

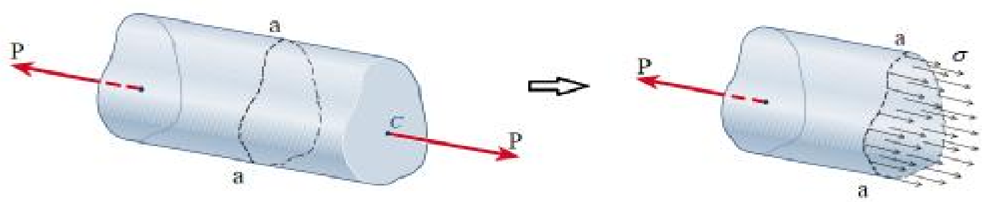
مقاومت مصالح

انواع تنش ها

1	تنش محوری (تنش عمودی یا نرمال) σ	تنش کششی	
		تنش فشاری	
2	تنش برشی τ		

- **تنش های ناشی از نیروی محوری**

نیروی محوری در جسم ایجاد تنش محوری می‌نماید. این تنش بصورت یکنواخت در سطح توزیع می‌شود.



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

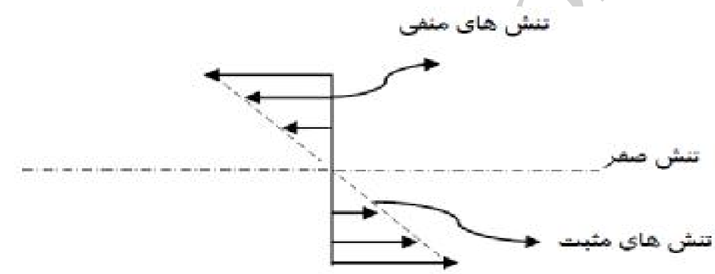
P = نیروی محوری وارده

A = مساحت مقطع

نکته: تنش کششی مثبت و تنش فشاری منفی می‌باشد.

- **تنش های ناشی از لنگر خمشی**

لنگر خمشی در سازه ایجاد تنش‌های محوری می‌کند که به صورت فشاری و کششی وارد می‌شوند. این تنش‌ها را تنش خمشی نیز می‌نامند. اگر خمش را به شکل زیر در نظر بگیریم، در لایه بالایی خط وسط، میله تحت فشار و در لایه پایینی نیز میله تحت کشش است. خط چین وسط را لایه یا محور خنثی می گویند چون در آن تنش عمودی صفر بوده و هیچ گونه کرنشی وجود ندارد و به عبارت دیگر، تغییر شکلی در آن وجود ندارد.

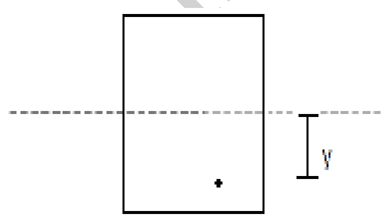


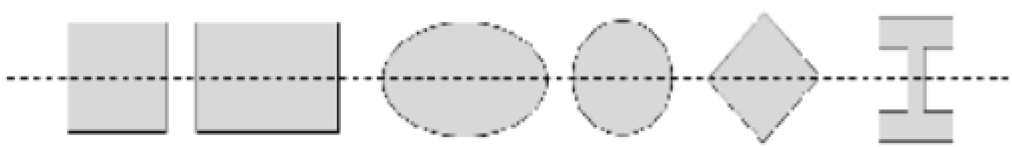
$$\sigma = \pm \frac{M.y}{I}$$

M = لنگر خمشی وارده

I = ممان اینرسی مقطع حول محور تار خنثی

y = فاصله نقطه مورد نظر تا تار خنثی



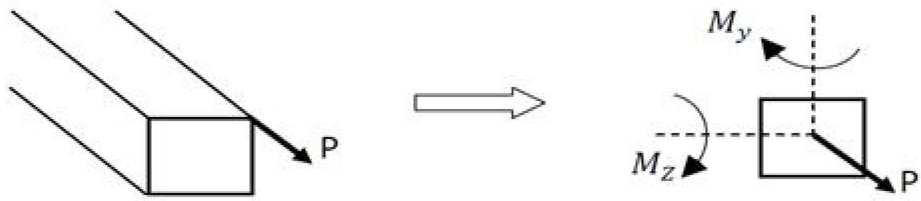


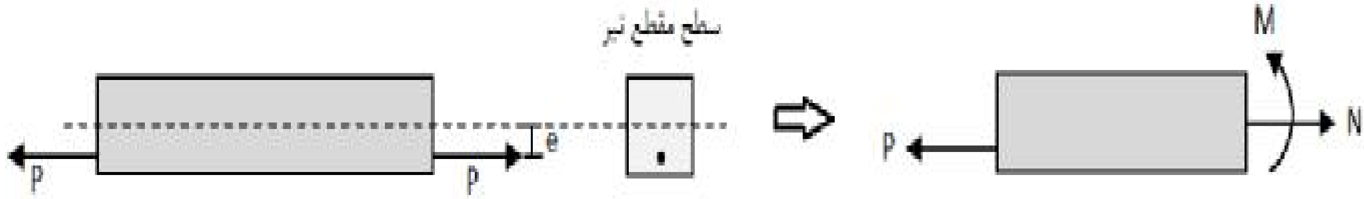
نکته1: بیشترین مقدار تنش در دورترین تار از تار خنثی رخ می‌دهد. این فاصله را با C نشان می‌دهند.

$$\sigma = \frac{M.C}{I} = \frac{M}{\frac{I}{C}} = \frac{M}{S}$$

S یا اساس مقطع یا مدول خمشی مقطع عبارتست از نسبت ممان اینرسی مقطع به فاصله دورترین تار از تار خنثی مقطع.

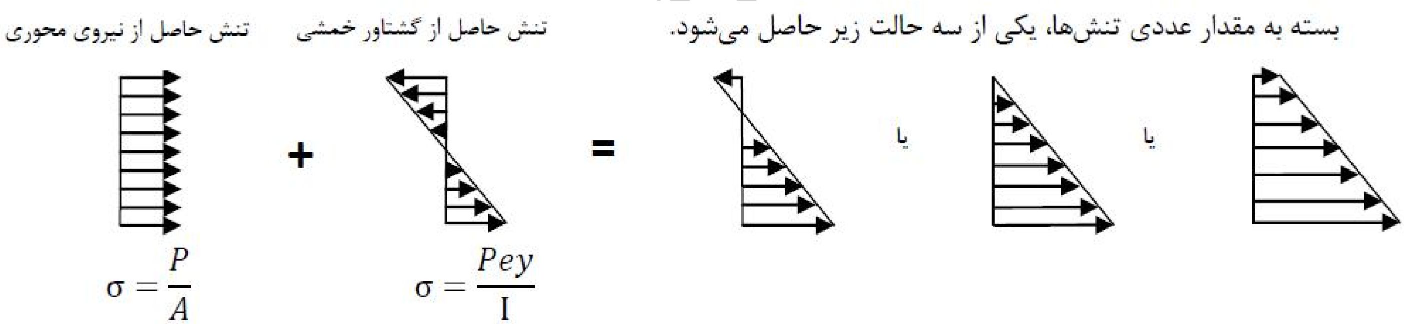
نکته2: چنانچه نیروی محوری از مرکز سطح مقطع نگذرد، در آن مقطع علاوه بر نیروی محوری لنگر خمشی نیز ایجاد می-شود.





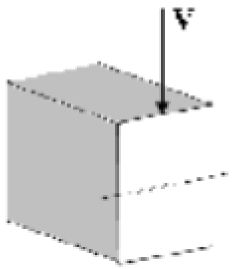
$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M.y}{I}$$
$$N = P \quad , \quad M = P.e$$

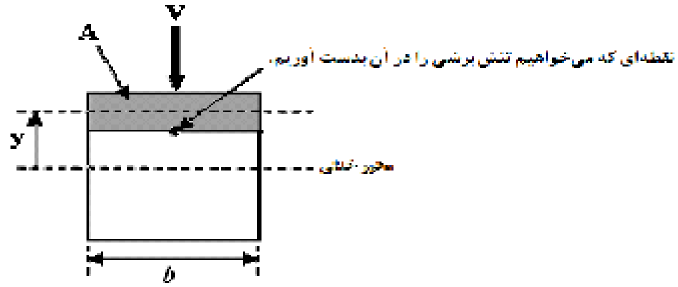
e = فاصله نیروی محوری تا تار خنثی



- **تنش های ناشی از <u>نیروی برشی</u>**

نیروی برشی در سازه ایجاد تنش‌های برشی می‌کند که همانند نیروی برشی مماس بر مقطع می‌باشند.





$$\tau = \frac{V.Q}{I.b}$$

V = نیروی برشی وارده

Q = ممان استاتیک مقطع جدا شده نسبت به محور تار خنثی ($Q = A.y$)

I = ممان اینرسی مقطع حول محور تار خنثی

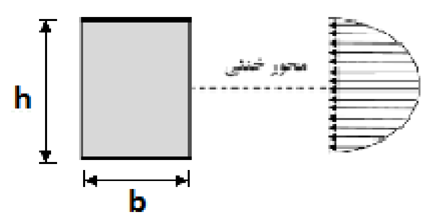
b = عرض مقطع در نقطه مورد نظر

<u>نکته1</u>: حداقل و حداکثر تنش برشی براساس حداقل و حداکثر مقدار Q تعیین می‌شود.

<u>نکته2</u>: چنانچه ضخامت مقطع ثابت باشد، <u>بیشترین مقدار تنش برشی</u> ناشی از نیروی برشی در محل تار خنثی رخ می‌دهد.

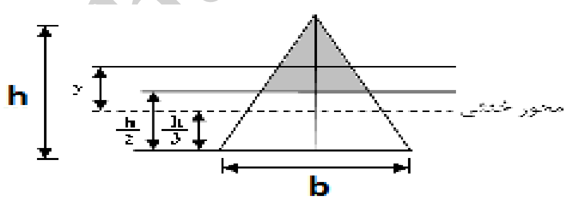
<u>نکته3</u>: <u>کمترین مقدار تنش برشی</u> ناشی از نیروی برشی در روی لبه‌های آزاد مقطع رخ می‌دهد.

<u>نکته4</u>: حداکثر تنش برشی در مقطع <u>مستطیلی</u> که در وسط ارتفاع آن رخ می‌دهد عبارتست از:



$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3V}{2bh}$$

<u>نکته5</u>: حداکثر تنش برشی در مقطع <u>مثلثی</u> که در وسط ارتفاع آن رخ می‌دهد عبارتست از:



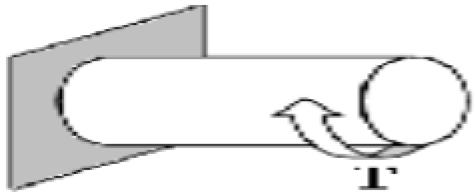
$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3V}{bh}$$

<u>نکته6</u>: <u>جریان برشی</u> (q) عبارتست از تنش برشی در ضخامت مقطع:

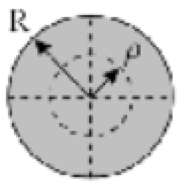
$$q = \tau.b = \frac{V.Q}{I}$$

- **تنش های ناشی از لنگر پیچشی**

لنگر پیچشی در سازه ایجاد تنش‌های برشی می‌کند که مماس بر مقطع می‌باشند. این تنش‌ها برای مقاطع مختلف بصورت زیر است:



1) **مقطع دایره ای**:

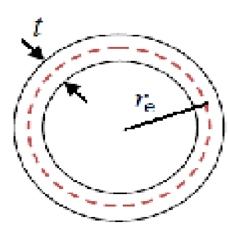


$$\tau = \frac{T.\rho}{J}$$

T = لنگر پیچشی وارده

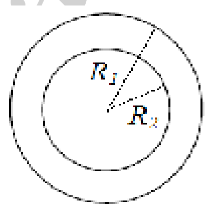
ρ = فاصله نقطه مورد نظر تا مرکز دایره

J = ممان اینرسی پیچشی مقطع بشرح زیر:



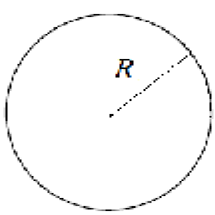
دایره جدار نازک

$$J = 2\pi {r_e}^3 t$$



دایره توخالی

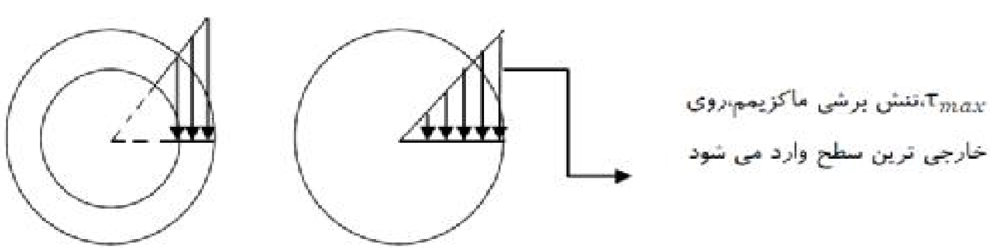
$$J = \frac{\pi}{2}\left({R_1}^4 - {R_2}^4\right)$$



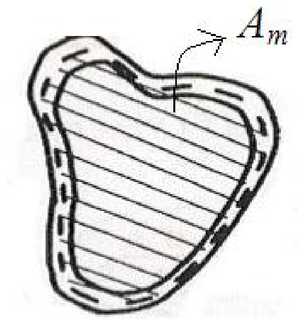
دایره توپر

$$J = \frac{\pi}{2}R^4$$

نکته: بیشترین تنش برشی بر روی سطح خارجی مقطع ($\rho=R$ یا $\rho=R_1$) رخ می‌دهد:



2) **مقطع جدار نازک بسته**:



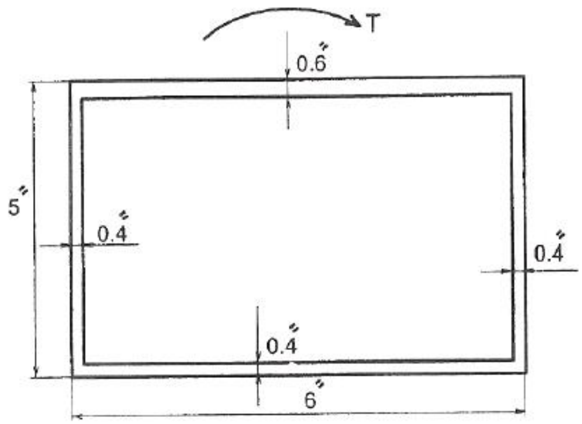
$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$

A_m = مساحت سطح محصور شده بین میان تار

t = ضخامت در محلی که مقدار تنش مورد نظر است.

مثال

به یک میله با مقطع مستطیل شکل جدار نازک گشتاور پیچشی $T = 18 \times 10^4 lb - in$ وارد می شود.تنش در قسمتهای مختلف را بدست آورید.

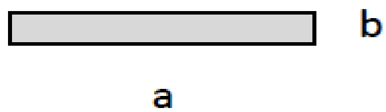


$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \qquad A_m = (6-0.4)(5-0.6) = 24.64$$

$$\tau_1 = \frac{180000}{2 \times 24.64 \times 0.6} = 6088psi$$

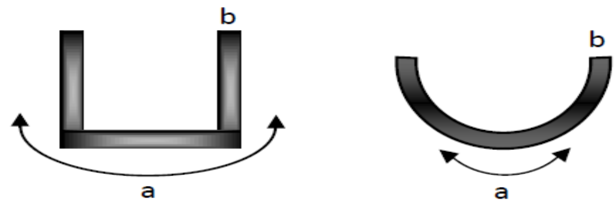
$$\tau_1 = \frac{180000}{2 \times 24.64 \times 0.4} = 9131psi$$

3) **سایر مقاطع**:

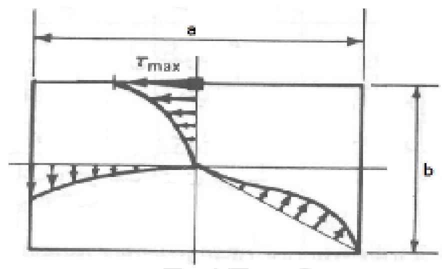


$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3}ab^2} \qquad a > b$$

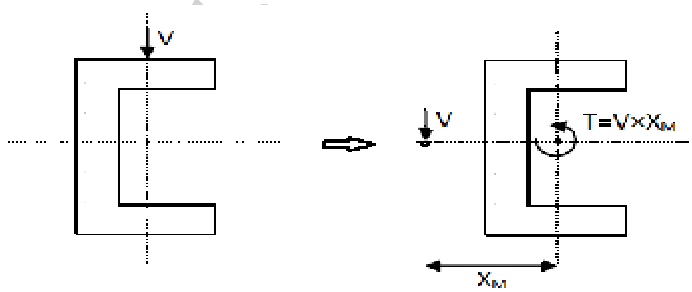
نکته1: مقدار a طول بزرگتر است که می‌تواند به شکل زیر باشد:



نکته2: تنش برشی حداکثر در وسط ضلع بزرگتر رخ می‌دهد.



نکته3: چنانچه نیروی برشی از مرکز برش مقطع نگذرد، در آن مقطع علاوه بر نیروی برشی لنگر پیچشی نیز ایجاد می‌شود. مرکز برش بر روی محور تقارن مقطع قرار دارد که در مقاطع با دو محور تقارن بر مرکز سطح شکل منطبق است.

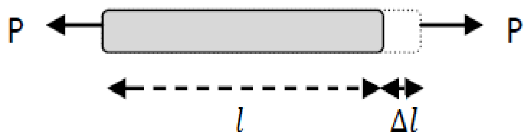


- **مجموع تنش ها**

تنش‌های محوری با هم و تنش‌های برشی نیز با یکدیگر (با لحاظ کردن علامت آنها با توجه به جهت) جمع جبری می‌شوند. در جمع تنش محوری و برشی، از جذر مجموع مجذور آنها استفاده می‌شود. بعبارت دیگر اگر σ تنش محوری و τ تنش برشی باشد، آنگاه مجموع آنها (R) عبارتست از:

$$\begin{cases} R = \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 \\ \tau_1 + \tau_2 \end{cases} & \text{اگر تنش‌ها از یک نوع باشند} \\ R = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} & \text{اگر تنش‌ها از یک نوع نباشند} \end{cases}$$

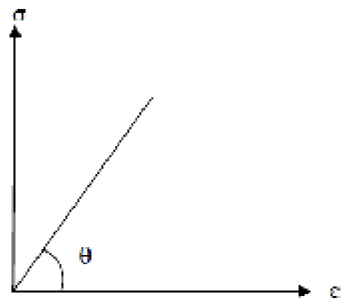
کرنش



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\begin{cases} \Delta l > 0 \rightarrow \varepsilon > 0 & \text{نیروی کششی و افزایش طول} \\ \Delta l < 0 \rightarrow \varepsilon < 0 & \text{نیروی فشاری و افزایش طول} \end{cases}$$

- **قانون هوک**:



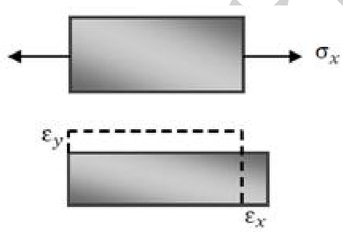
$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

$$\boldsymbol{\sigma = E\varepsilon}$$

- **ضریب پواسون (ν)**:

ضریب پواسون عبارتست از منفی نسبت کرنش جانبی به کرنش طولی ($\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$).

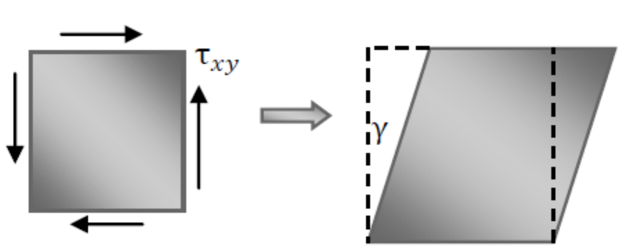
<u>نکته</u>: ضریب پواسون همیشه مثبت است.



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_Z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

- **کرنش برشی (γ)**:



$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

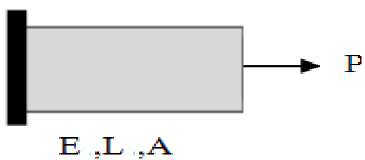
E = مدول الاستیسیته

G = مدول الاستیسیته برشی

ν = ضریب پواسون

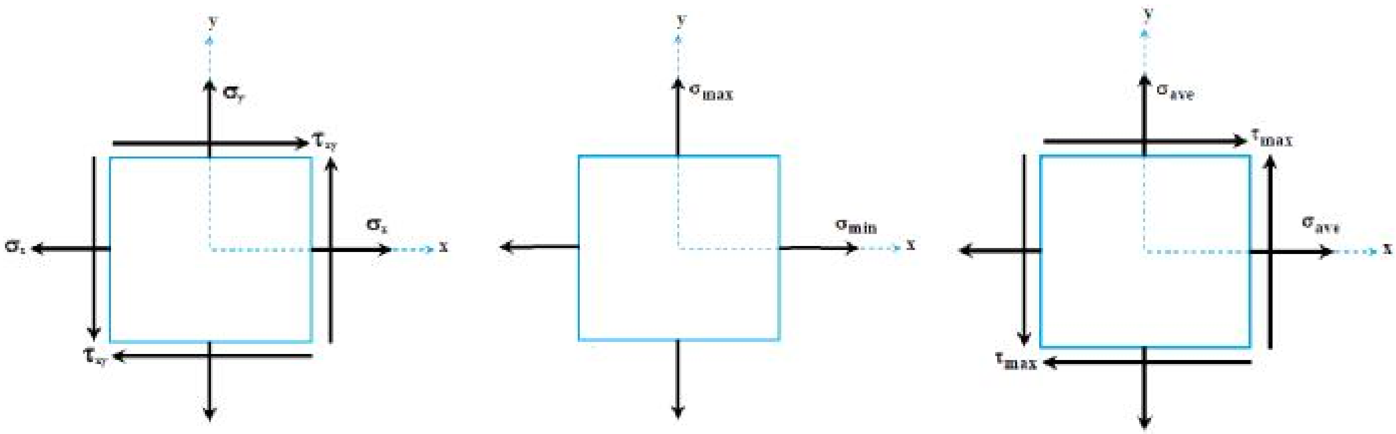
- **تغییر شکل محوری**:

نیروی محوری باعث ایجاد تنش محوری در جسم و در نهایت تغییر شکل آن (افزایش یا کاهش طول) می‌شود.

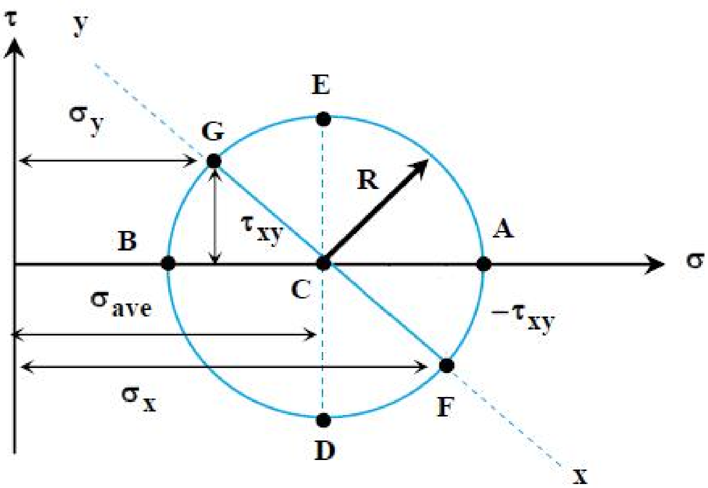


$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{P}{A} \\ \sigma = E\varepsilon \\ \varepsilon = \dfrac{\Delta}{L} \end{cases} \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{PL}{AE}$$

۷ تبدیلات تنش



تنش‌های اصلی



- **نکات:**

1) دترمینان ماتریس تنش‌ها عددی ثابت است:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{max} & 0 \\ 0 & \sigma_{min} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{ave} & \tau_{max} \\ \tau_{max} & \sigma_{ave} \end{vmatrix} \rightarrow \left(\sigma_x . \sigma_y - {\tau_{xy}}^2\right) = \sigma_{max} . \sigma_{min} = \left({\sigma_{ave}}^2 - {\tau_{max}}^2\right)$$

2) مجموع تنش‌های محوری همیشه ثابت است:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{max} + \sigma_{min} = 2\sigma_{ave}$$

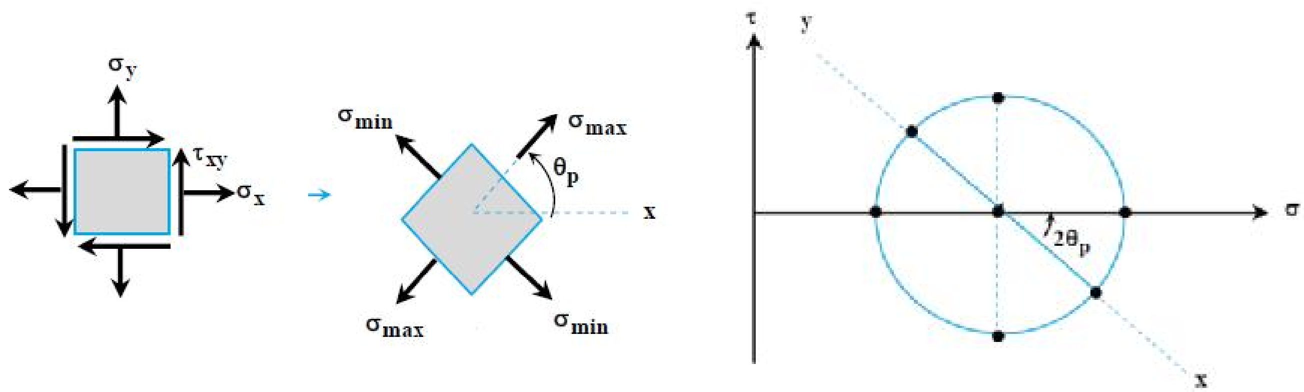
3) تنش متوسط که مقدار تنش محوری در مرکز دایره مور ($C(\sigma_{ave}, 0)$) می‌باشد، عبارتست از:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

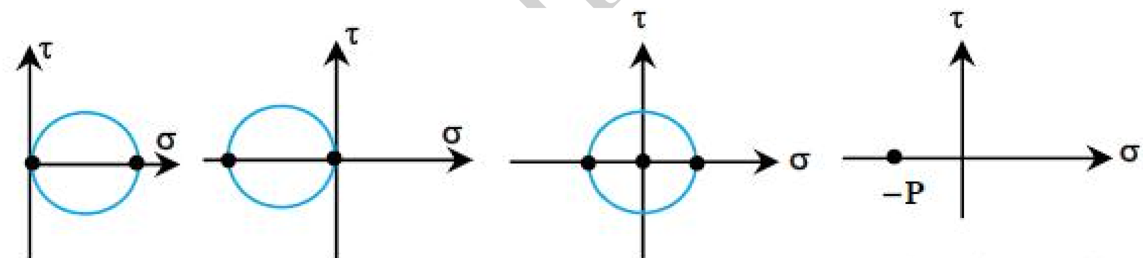
4) تنش برشی ماکزیمم که برابر با شعاع دایره مور می‌باشد، عبارتست از:

$$\tau_{max} = R = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

5) برای تعیین مقدار تنش‌ها روی صفحات دیگر، باید در دایره مور به اندازه 2 برابر زاویه و در همان جهت دوران داد.



6) برای چند حالت خاص بارگذاری، دایره مور به شکل زیر است:



کشش ساده | فشار ساده | برش ساده یا پیچش خالص | فشار هیدرواستاتیک